abc412_f Socks 4 题解

题目大意

高桥君的抽屉里有 N 种颜色的袜子，其中颜色 i 的袜子有 A_i 只。

最初，高桥君在抽屉外单独放着一只颜色为 C 的袜子，并重复以下操作直到满足终止条件：

- 从抽屉中均匀随机地抽取 1 只袜子。若此时抽屉外的两只袜子颜色相同，则终止操作；否则选择其中一只袜子放回抽屉。他总是以最小化未来抽取次数期望的方式选择要放回的袜子。

求操作终止前抽取次数的期望值，结果对 998244353 取模。

解题思路

首先将问题转换一下。

首先将编号为 C 的袜子放回抽屉里，很明显此时抽屉里编号为 C 的袜子数量增加了一只 $\rightarrow$ 记住这个数量（假设这个数量是 X），因为待会儿会用到。

然后给 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ 从小到大排序，然后找到任意一个等于 X 的 A_i，设下标为 p。

此时，我们可以发现，排序后编号为 p 的袜子等价于排序前编号为 C 的袜子。

因为我已经把袜子放回抽屉了，所以现在我设计要求的状态 f_i 的含义可以理解为：

> 如果在抽屉外的袜子颜色为 i，则抽取次数的期望值。

如果这么理解的话，可以发现一个规律：

> 若 $A_i = A_j$，则 $f_i = f_j$

假设取的袜子颜色是 j，此时可以分三种情况来讨论：

1. 如果 $A_j < A_i$，肯定要把颜色 j 的袜子放回去，剩余的局面还是 f_i；
2. 如果 $A_j = A_i$，不论把颜色为 i 还是 j 的袜子放回去，结果还是一样的（把颜色为 j 的袜子放回去，剩余的局面是 f_i；把颜色为 i 的袜子放回去，剩余的局面是 f_j，又因为 $A_i = A_j$，所以 $f_i = f_j$）
   - 当然，其中有一种情况是 $j = i$，此时操作结束；
3. 如果 $A_j > A_i$，肯定把颜色 i 的袜子放回去，剩余的局面是 f_j（因为 $A_j > A_i$，而我又给 A 从小到大排序了，所以 $j > i$）

如果用

- tot 表示袜子总数（包括一开始在抽屉外后来放入抽屉内的那只袜子）；
- sum_i 表示 A_i 的前缀和，即 $sum_i = \sum_{j=1}^{i} A_j$

并且我们设 i 满足 "$i = n$" 或 "$i < n$ 且 $A_i < A_{i+1}$"（因为 $i < n$ 且 $A_i = A_{i+1}$ 时，$f_i = f_{i+1}$）

我们能发现：

- 有 $\frac{A_i - 1}{tot - 1}$ 的概率抽到自己，游戏结束
- 有 $\frac{sum_i - A_i}{tot - 1} = \frac{sum_{i-1}}{tot - 1}$ 的概率 $j \neq i$ 且 $A_j \leq A_i$ 的颜色，此时剩余的局面还是 f_i
- 对于所有 $j > i$，有 $\frac{A_j}{tot - 1}$ 的概率

所以可以得到如下方程

$$f_i = \frac{sum_{i-1}}{tot-1} f_i + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_j \cdot f_j}{tot-1} + 1$$

如果我们按照 i 从大到小求状态 f_i，同时开一个变量 tmp 记录后缀和 $\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_j \cdot f_j$，则可以得到

$$f_i = \frac{tmp+tot-1}{tot-1-sum_{i-1}}$$

最终的答案为 f_p(因为最初是从颜色 p 开始的)。

时间复杂度 $O(n)$。