abc416_f Paint Tree 2 题解

题目大意

在树上选择不超过 K 条链（不存在同一个点在多条链上），是的所有在链上的点的权值之和最大。

（题目中选择的点是黑点，没选的点是白点）

求：在链上的点的权值之和的最大值。

解题思路

树形DP（树上背包）

假定 1 号点是整棵树的根结点，考虑树形DP。

对于以树上每个点作为根结点所形成的子树而言，我们需要重点讨论根结点是否被选中成为某条路径的一部分。情况可以有以下几种：

0. 当前根结点没有用过
1. 当前根结点是某条路径的一个端点
2. 当前根结点是某条路径过程中的一个点(非端点)

所以定义 `f[i][j][k]` 表示在以点 i 作为根结点的子树中，我们进行了 j 次操作，且 $k = 0/1/2$ 表示根结点符合以上三种情况的哪一种。

对于树上的某个点 u 而言，先将其子结点的答案求出，然后考虑其子结点 v 的答案对他的影响：

如果子结点 u 中选择的路径与当前根结点 u 毫无相关，那就直接把两个点分开看。枚举在根结点 u 此前已搜索过的其它子结点中所使用的操作次数为 i，枚举子结点 v 的子树所使用的操作次数为 j，那么直接合并答案，总操作次数就是 $i + j$。
该部分状态转移方程较为普通，我们不需要在意子结点 v 在它的子树的答案里是怎么样的一个情况，只需要专注于当前根结点 u 的情况即可。该部分状态转移方程可以写作:
$f[u][i+j][p] \leftarrow \max(f[u][][p] + f[v][j][q])$。

如果子结点 v 中选择的路径可以与当前根结点 u 合并，总共存在两种情况：

1. 当前根结点 u 此前并未被任何路径选中，而子结点 v 存在于一条以 v 为端点的路径中，此时我们可以将根结点 u 加入到这条路径当中，将其变成一条以“作为端点的路径，此时的状态转移方程为 $f[u][i+j][1] \leftarrow f[u][i][0] + f[v][j][1] + A[u]$。
2. 当前根结点"存在于一条以 u 作为端点的路径中，子结点 v 也存在于一条以v为端点的路径中，此时这两条路径是可以合并成一条路径，使操作次数少一次的，但合并后根结点就只是某条路径的中间过程点了。这部分的状态转移方程则为 $f[u][i+j-1][2] \leftarrow f[u][i][1] + f[v][j][1]$。

转移过程如果全部在单个数组内完成，请注意转移顺序，否则可以每次转移都开一个新数组来保证不会重复转移。

最后考虑动态规划的初始状态，对于单个点而言，在处理其子树之前先考虑其本身是否需要选择成为某条新路径的一部分：

- 如果该点不选，则 $f[u][0][0] = 0$
- 如果该点要选，则 $f[u][1][1] = f[u][1][2] = A[u]$ 最终答案即处理完整棵树之后，根结点 1 位置处的 $\max\limits_{i \in [0,K]} \max\limits_{j \in [0,2]} \{f[1][i][j]\}$。