abc418_e Subarray Sum Divisibility 题解

题目大意

给你一个长度为 N 的数列 A。

每次操作可以任选一个 A_i 并将其数值加 1。

你需要使用最少的操作次数使数列 A 中每个长度为 L 的连续子序列和均为 M 的倍数。

求：最少操作次数。

解题思路

数组 A 中所有长度为 L 的子数组的和都是 M 的倍数，当且仅当以下两个条件同时满足：

1. $A_1 + A_2 + \ldots + A_L$ 是 M 的倍数。
2. 对于所有满足 $1 \leq i \leq N - L$ 的 i，$A_i - A_{i+L}$ 是 M 的倍数。

因此，当我们确定了对 $A_1, A_2, \ldots, A_L$ 每个元素的操作次数后，对于 $i = L+1, L+2, \ldots, N$，所需的操作次数就是使 A_{i-L} 与 A_i 模 M 同余所需的最少操作次数。

设 $f_{i,j}$ 为使 $A_i, A_{L+i}, A_{2L+i}, \ldots$ 都与 j 模 M 同余所需的最少操作次数。这可以通过朴素算法在 $O(NM)$ 时间内计算得到。

我们可以使用 DP 解决这个问题。

我们利用 $f_{i,j}$ 的值进行动态规划（DP）。

定义 $dp_{i,j}$ 为对 $A_1, A_2, \ldots, A_i$ 执行操作后，使得 $(A_1 + A_2 + \ldots + A_i)$ 除以 M 的余数等于 j 所需的操作次数。这里的“所需操作次数”不仅包括对 $A_1, A_2, \ldots, A_i$ 的操作，还包括所有索引模 L 等于 $1, 2, \ldots, i$ 中任意一个的元素的操作。根据上述分析，确定对 A_i 的操作次数后，对 $A_{L+i}, A_{2L+i}, \ldots$ 的操作次数就被唯一确定了，因此这个定义是可计算的。

如果我们确定要使 A_i 模 M 同余于 k，那么对 $A_i, A_{L+i}, A_{2L+i}, \ldots$ 所需的操作次数就是 $f_{i,k}$（根据定义）。因此，我们可以通过以下方式填充 DP 表：

$$dp_{i,((j+k) \bmod M)} \leftarrow \min(dp_{i,((j+k) \bmod M)}, dp_{i-1,j} + f_{i,k})$$

最终答案为 $dp_{L,0}$。

时间复杂度 $O(LM^2)$。